Линейное программирование

Линейное программирование – наука о методах исследования и отыскание наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Функция, наибольшее и наименьшее значение которой отыскивается, называется *целевой функцией*.

Построим математические модели простейших экономических задач.

Пример 1 (*задача об использовании ресурсов*). Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используются три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запасы ресурсов, затраты ресурсов на единицу продукции, а также цены единицы продукции приведены в следующей таблице

Ресурсы	Затраты ресурсов на ед. продукции		Запасы ресурсов
	P_1	P_2	
S_1	2	4	2000
S_2	4	1	1400
S_3	2	1	800
Цена ед. продукции	40	60	

Требуется построить план производства, максимизирующий доход.

Построим математическую модель задачи, определив в ней переменные, ограничения и целевую функцию.

Переменные: x_1, x_2 – количество единиц выпускаемой продукции P_1, P_2 (объемы производства).

Ограничения. Ограничение на расход ресурсов можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix}\text{Расход}\\ \text{ресурсов}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Запас}\\ \text{ресурсов}\end{pmatrix}.$$

Это приводит к следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 2000 \\ 4x_1 + \ \ x_2 \le 1400 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 800 \end{cases}$$

Кроме того, переменные должны быть неотрицательными.

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ - условие неотрицательности.

Целевая функция – суммарный доход от реализации всей продукции:

$$F(x) = 40x_1 + 60x_2, \quad x = (x_1, x_2).$$

Требуется найти такие неотрицательные переменные x_1, x_2, удовлетворяющие ограничениям, при которых суммарный доход максимален, т.е.

$$\max F(x).$$

Экономико-математическая модель задачи кратко записывается в виде:

$$F(x) = 40x_1 + 60x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 2000 \\ 4x_1 + \ \ x_2 \le 1400 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 800 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ - условие неотрицательности.

Пример 2 (*задача составления рациона*). Норма пищевого рациона должна содержать не менее b_1, b_2, b_3 питательных веществ S_1, S_2, S_3. Для составления пищевого рациона используются два вида продуктов питания P_1, P_2. Содержание питательных веществ в единице каждого продукта и стоимость единицы продукта (цена) приведены в следующей таблице

Питательные Вещества	Содержание питательных веществ в ед. продукта		Норма вещества
	P_1	P_2	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Цена ед. продукта	4	6	

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить норму рациона при его минимальной стоимости.

Построим математическую модель задачи, определив в ней переменные, ограничения и целевую функцию.

Переменные: x_1, x_2 – количество единиц соответствующего вида продукта P_1, P_2.

Ограничения. Ограничение на содержание питательных веществ в рационе можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix}\text{Содержание}\\ \text{питательного}\\ \text{вещества}\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}\text{Норма}\\ \text{вещества}\end{pmatrix}.$$

Это приводит к следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Кроме того, переменные должны быть неотрицательными.

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ - условие неотрицательности.

Целевая функция – общая стоимость рациона:

$$F(x) = 4x_1 + 6x_2, \quad x = (x_1, x_2).$$

Требуется минимизировать стоимость рациона при заданных ограничениях, т.е. $\min F(x)$.

Экономико-математическая модель задачи кратко записывается в виде

$$F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ - условие неотрицательности.

Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) ставится следующим образом. Найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$ - условие неотрицательности,

где *x*– переменные; *a,b,c* – заданные постоянные величины.

В системе ограничений неравенства могут быть направлены в ту или иную сторону (≤, ≥).

Допустимым решением (*планом*) ОЗЛП называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условию неотрицательности.

Областью допустимых решений (ОДР) называется множество всех допустимых решений ОЗЛП.

Оптимальным решением ОЗЛП называется допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения.

Геометрическая интерпретация ОЗЛП

Рассмотрим ОЗЛП с *двумя переменными* (на плоскости).

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$ - условие неотрицательности.

Свойства решений ОЗЛП тесно связаны со свойствами выпуклых множеств. Рассмотрим на плоскости множество точек (x_1, x_2).

Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий их; в противном случае называется *невыпуклым*.

Примеры выпуклых и невыпуклых множеств показаны на рисунке

Точка *A* называется *внутренней точкой* выпуклого множества, если в сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся только точки этого множества.

Точка *B* называется *граничной точкой* выпуклого множества, если в сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся как точки данного множества, так и не принадлежащие ему.

Точка *C* называется *угловой точкой* выпуклого множества, если она является граничной и не лежит внутри отрезка, соединяющего две другие точки этого множества.

Множество называется *замкнутым*, если оно включает все свои граничные точки.

Множество называется *ограниченным*, если существует окружность радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, которое полностью содержит в себе данное множество; в противном случае называется *неограниченным*.

Пересечением выпуклых множеств называется множество, представляющее общую часть данных множеств.

Свойство: Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Выпуклым многоугольником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек.

Полуплоскостью называется множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b.$$

Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ является *граничной прямой* полуплоскости.

Граничная прямая делит плоскость на две полуплоскости. Для определения, на какую сторону от граничной прямой расположена данная полуплоскость, надо взять произвольную точку на плоскости, и подставить координаты этой точки в неравенство. Если неравенство справедливо, то полуплоскость обращена в сторону этой точки, иначе – в противоположную. Направление полуплоскости на рисунках штрихуется.

Полуплоскости являются выпуклыми множествами. Каждое из неравенств системы ограничений определяет полуплоскость. Система ограничений в виде неравенств (пересечение) образует выпуклое множество, которое называется *многоугольником решения задачи*. Стороны этого многоугольника лежат на граничных прямых, а угловые точки определяются как точки пересечения смежных граничных прямых.

Геометрически задача ЛП представляет отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которого доставляют линейной функции $F(x)$ экстремум, причем допустимыми решениями служат все точки многоугольника решений.

Теорема. Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то оно достигается в одной из угловых точек многоугольника решений.

Графическое решение задач ЛП. Наиболее простым и наглядным методом ЛП является графический метод. Он применяется для решения задач ЛП с двумя переменными (на плоскости).

Рассмотрим задачу об использовании ресурсов.

$$F(x) = 40x_1 + 60x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 2000 \\ 4x_1 + x_2 \le 1400 \\ 2x_1 + x_2 \le 800 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ - условие неотрицательности.

Решим данную задачу графическим методом.

▼ Каждое неравенство системы ограничений определяет полуплоскость с граничной прямой:

$$L_1\colon 2x_1 + 4x_2 = 2000;$$
$$L_2\colon 4x_1 + x_2 = 1400;$$
$$L_3\colon 2x_1 + x_2 = 800.$$

Условие неотрицательности определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Для нахождения области допустимых решений (ОДР) строим граничные прямые. На плоскости прямую линию можно провести через две характерные точки, отсекаемые прямой на координатных осях.

Для построения граничных прямых определим их характерные точки.

L_1: $2x_1 + 4x_2 = 2000$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 500$, точка (0; 500);

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1000$, точка (1000; 0).

L_2: $4x_1 + x_2 = 1400$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1400$, точка (0; 1400);

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 350$, точка (350; 0).

L_3: $2x_1 + x_2 = 800$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 800$, точка (0; 800);

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 400$, точка (400; 0).

Прежде чем строить на плоскости граничные прямые, введем еще ряд необходимых характеристик графического решения задач ЛП.

Линией уровня функции $F(x)$ называется множество точек (x_1, x_2) на плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение, т.е. $F(x)= C$.

Уравнение линии уровня целевой функции есть $40x_1 + 60x_2 = C$ (семейство параллельных прямых).

Вектор n **=** (40, 60) указывает направление наибольшего возрастания целевой функции $F(x)$ и перпендикулярен линиям уровня $F(x)= C$. Построим линию уровня $F(x) = C$, приняв $C = 9600$, т.е. линия уровня линия уровня определяется выражением $40x_1 + 60x_2 = 9600$.

Замечание. Константа C = 9600 выбрана из условия, чтобы пересечения прямой линии уровня с координатными осями были целыми числами.

Линию уровня $40x_1 + 60x_2 = 9600$ строим по двум характерным точкам:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 160$, точка (0; 160);

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 400$, точка (400; 0).

На листе Excel заносим все характерные точки, определяющие граничные прямые и линию уровня. Используя графические средства Excel, строим все перечисленные прямые.

На рис. показаны граничные прямые и ОДР (заштриховано).

	x	y
L_1	0	500
	1000	0
L_2	0	1400
	350	0
L_3	0	800
	400	0
FC	0	160
	240	0

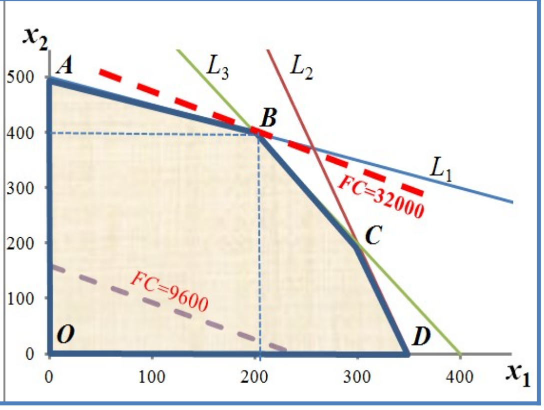


Рис. Оптимальное решение модели

Среди точек этого многоугольника нужно найти такую точку, в которой линейная функция $F = 40x_1 + 60x_2$ принимает максимальное значение.

Перемещая линию уровня $FC = 9600$ параллельно самой себе в направлении вектора n до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с многоугольником решения (угловая точка B), получим оптимальное решение задачи ЛП, соответствующее максимальному значению целевой функции.

Координаты точки B(200; 400).

Таким образом, графический способ решения задачи дает оптимальное решение:

$$x = (200; 400), \quad F_{\max} = F(B) = 40 \cdot 200 + 60 \cdot 400 = 32000.$$

Это значит, чтобы получить максимальный доход в размере 32000 усл. ед., необходимо запланировать производство 200 единиц продукции P_1 и 400 единиц продукции P_2.

Статус ресурсов. Ограничения линейной модели классифицируются на связывающие и не связывающие.

Граничная прямая, представляющее связывающее ограничение, проходит через оптимальную точку; в противном случае ограничение является не связывающим, На рис. связывающими ограничениями являются ограничения, представленными прямыми L_1, L_3, а не связывающее ограничение представлено прямой L_2.

Статус ресурса (дефицитным или недефицитным) устанавливается в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи. Если ограничение является связывающим, то этот ресурс относится к дефицитному (используется полностью). Если ограничение является не связывающим, то ресурс относится к недефицитному, следовательно, ресурсы 1, 3 являются дефицитными, а ресурс 2 - недефицитным.

Решение задач ЛП в Excel

Решение задач линейного программирования можно произвести с помощью надстройки MS Excel «*Поиск решения*». Надстройка становится доступной при установке MS Excel. Однако, чтобы использовать эту надстройку в Excel, необходимо сначала загрузить ее.

Загрузка надстроек Поиск решения и Анализ данных:

• в Microsoft Office 2010 щелкните значок *Кнопка Microsoft Office*, а затем *Параметры Excel*;

• выберите команду *Надстройки*, а затем в поле *Управление* – пункт *Надстройки Excel*;

• нажмите кнопку *Перейти*;

• в окне *Доступные надстройки* установите флажок *Поиск решения* и нажмите *ОК*.

После загрузки надстройки *Поиск решения* в группе *Анализ* на вкладке *Данные* становится доступна команда *Поиск решения*.

До вызова *Поиск решения* необходимо подготовить данные для решения задачи ЛП на рабочем листе Excel.

Пример 1. Решим задачу ЛП.

$$F(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Анализ данных в Excel. Вид листа Excel для примера 1 показан в следующей таблице

	A	B	C	D	E
1		x_1	x_2		
2					
3	F	2	-1	0	
4	b_1	1	1	0	4
5	b_2	-1	2	0	2
6	b_3	1	2	0	10

Данные задачи и формулы в соответствующие ячейки вводятся следующим образом.

B1:C1 — записаны обозначения переменных модели x_1, x_2.

B2:C2 — резервируются для значений переменных модели, которые будут найдены после выполнения процедуры *Поиск решения*.

A3:A6 — записаны обозначения строки целевой функции F и строк ограничений b_1, b_2, b_3.

B3:C3 — записаны коэффициенты при переменных модели в целевой функции.

B4:C6 — заносим матрицу коэффициентов при переменных в системе ограничений модели.

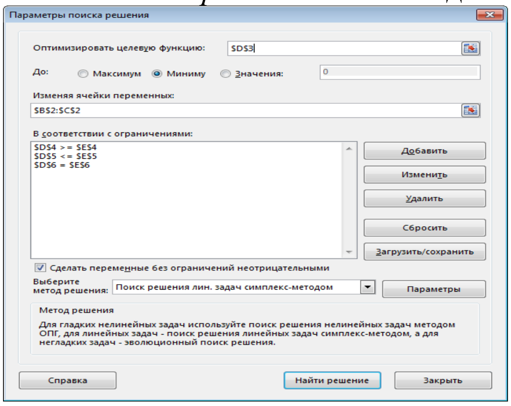
E4:E6 — записаны правые части системы ограничений модели.

D3 (целевая ячейка) — вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B3:C3;$B$2: $C$2). «Протягиваем» ее до D6 включительно.

Запустить команду *Поиск решения*.

В диалоговом окне *Поиск решения* выполнить:

• установить целевую ячейку равной минимальному значению;
• изменяя ячейки, ввести адрес переменных;
• ввести ограничения;
• выбрать метод решения: *Поиск решения задач симплекс-методом*.
Заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеет вид



После выполнения программы работы *Поиск решения* получим

	x_1	x_2		
	4	3		
F	2	-1	5	
b_1	1	1	7	4
b_2	-1	2	2	2
b_3	1	2	10	10

Оптимальное решение: $x = (4; 3)$. $F_{\min}(x) = 5$ ▲

Пример 2 (задача составления рациона).

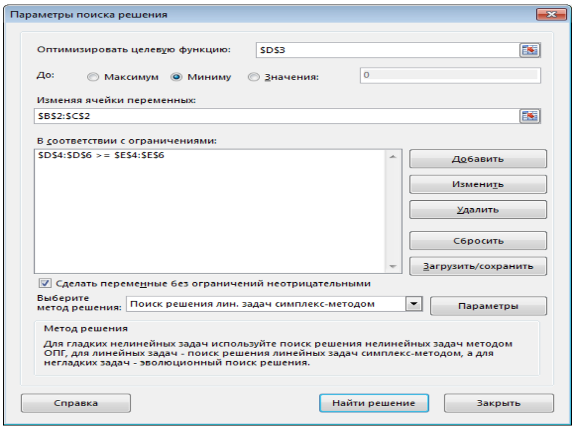
$$F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Анализ данных в Excel. Исходные данные примера 2 на рабочем листе Excel, и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют вид

	A	B	C	D	E
1		x_1	x_2		
2					
3	F	4	6	0	
4	b_1	3	1	0	9
5	b_2	1	2	0	8
6	b_3	1	6	0	12



После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

	x_1	x_2		
	2	3		
F	4	6	26	
b_1	3	1	9	9
b_2	1	2	8	8
b_3	1	6	20	12

Оптимальное решение: $x = (2; 3)$. $F_{\min}(x) = 26$ ▲

Пример 3 (задача использования ресурсов).

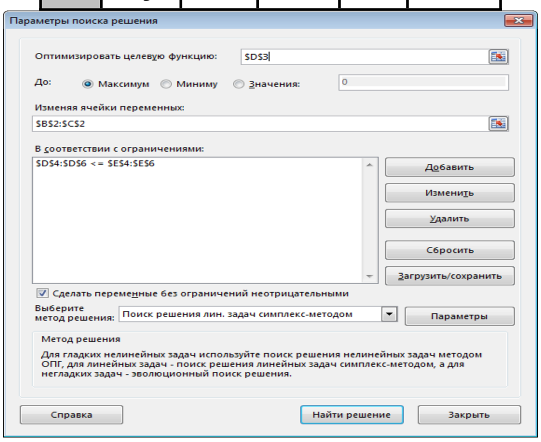
$$F(x) = 40x_1 + 60x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 2000 \\ 4x_1 + x_2 \le 1400 \\ 2x_1 + x_2 \le 800 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Анализ данных в Excel. Исходные данные примера 3 на рабочем листе Excel, и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют вид

	A	B	C	D	E
1		x_1	x_2		
2					
3	F	40	60	0	
4	b_1	2	4	0	2000
5	b_2	4	1	0	1400
6	b_3	2	1	0	800



После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

	x_1	x_2		
	200	400		
F	40	60	32000	
b_1	2	4	2000	2000
b_2	4	1	1200	1400
b_3	2	1	800	800

Оптимальное решение: $x = (200; 400)$. $F_{\max}(x) = 32000$.

Целочисленное линейное программирование

Под **задачей целочисленного ЛП** понимается задача ЛП, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

Пример 6. Найти целочисленное решение

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 34 \\ \qquad\quad x_2 \le 5 \end{cases}$$

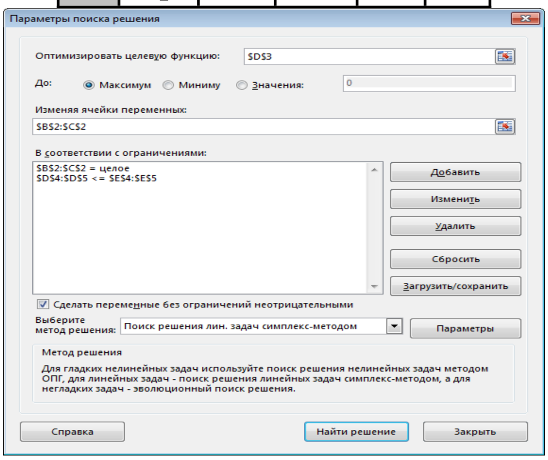
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \text{ - целые}$$

Анализ данных в Excel. При решении задачи целочисленного линейного программирования в *Excel Поиск решений* необходимо ввести условия целочисленности. В диалоговом окне *Добавление ограничения* следует выбрать опцию *целое* в раскрывшемся списке *Ограничение*

Исходные данные, представленные в рабочем листе Excel, и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют вид

	A	B	C	D	E
1		x_1	x_2		
2					
3	F	2	3	0	
4	b_1	3	4	0	34
5	b_2	0	1	0	5



После выполнения программы работы *Поиск решения* получим

	x_1	x_2		
	6	4		
F	2	3	24	
b_1	3	4	34	34

b_2	0	1	4	5

Оптимальное решение $x = (6; 4)$, $F_{max}(x) = 24$ ▲

Упражнение 1. Найти целочисленное решение

$$F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ - целые}$$

Ответ. Оптимальное решение $x = (2; 1)$, $F_{max}(x) = 5$

Двоичные (булевы) переменные

Во многих практических случаях переменные принимают не любые целые значения, а лишь одно из двух: либо 0, либо 1. Такие переменные называют двоичными (булевыми).

При решении задачи ЛП с двоичными переменными в Excel (*Поиск решения*) к имеющимся в задаче ограничениям необходимо добавить условие двоичности переменных. Добавляя ограничения, следует выбрать опцию *бинарное* в раскрывшемся списке *Ограничение*.

Пример 1. (*задача о выборе инвестиционных проектов в условиях ограниченности финансовых ресурсов*). У фирмы для выполнения некоторых программ имеется пять инвестиционных проектов, чистая приведенная стоимость (ЧПС) которых указана в следующей таблице

Номер Проекта	ЧПС, усл.ед.	Требуемые вложения, усл. ед		
		1-й год	2-й год	3-й год
1	40	12	8	17
2	60	17	17	20
3	38	10	7	21
4	50	7	22	6
5	55	17	14	20
Выделенный объем денежных средств, усл. ед.		54	62	70

Однако фирма не может финансировать все проекты: сумма денег, выделенных на текущий год, составляет 54 усл. ед., а на последующие два года 62 и 70, что меньше необходимых для инвестирования в полном объеме. При этом оставшиеся денежные средства не могут быть перенесены на следующие годы, а также не планируется финансировать более одного раза один и тот же проект.

Требуется распределить выделенные средства в инвестиционные проекты оптимальным способом.

▼ Пусть переменные x_1, x_2, x_3, x_4 – доля вложения в соответствующий проект, причем каждое x_i – принимает только два значения (двоичная переменная):

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{если проект не финансируется} \\ 1, \text{если проект финансируется} \end{cases}$$

Экономика- математическая модель задачи есть

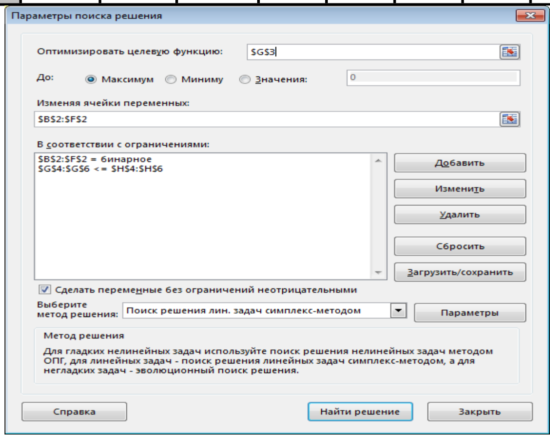
$$F(x) = 40x_1 + 60x_2 + 38x_3 + 50x_4 + 55x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 7x_4 + 17x_5 \leq 54 \\ 8x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 22x_4 + 14x_5 \leq 62 \\ 17x_1 + 20x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 20x_5 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ - двоичные}$$

Анализ данных в Excel. Исходные данные, представленные в рабочем листе Excel, и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют вид

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2								
3	F	40	60	38	50	55	0	
4	b_1	12	17	10	7	17	0	54
5	b_2	8	17	7	22	14	0	62
6	b_3	17	20	21	6	20	0	70



После выполнения программы работы *Поиск решения* получим

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	1	1	0	1	1		
F	40	60	38	50	55	205	
b_1	12	17	10	7	17	53	54
b_2	8	17	7	22	14	61	62
b_3	17	20	21	6	20	63	70

Оптимальное решение $x = (1; 1; 0; 1; 1)$, $F_{max}(x) = 295$.

Таким образом, необходимо финансировать 1-й, 2-й, 4-й и 5-й проекты, при этом сумма ЧПС проектов максимальна и составляет 205 усл. ед. Для этого потребуются денежные средства в объеме 53 + 61 + 63 = 177 усл. ед. в течение трех лет при выделенных фирмой 54 + 62 + 70 = 186 ден. ед. ▲

Транспортная задача

Постановка транспортной задачи

Транспортная задача (ТЗ) используется при разработке плана перевозок однородного вида продукции, сосредоточенного в нескольких пунктах отправления в пункты назначения.

Пункты отправления (ПО). Имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых сосредоточены грузы в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ед.

Пункты назначения (ПН). Имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, подавшие заявки на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ед. товара.

Известны стоимости (тарифы) c_{ij} перевозок единиц товара от каждого ПО в каждый ПН.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки на товар были бы выполнены при минимальной стоимости всех перевозок.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем ТЗ могут быть закрытыми и открытыми.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется *закрытой*.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется *открытой*.

Закрытая транспортная задача

Построим математическую модель задачи, определив в ней переменные, ограничения и целевую функцию.

Переменные: x_{ij} - количество груза, отправляемого из пункта A_i в пункт B_j, причем $x_{ij} \geq 0$.

Запишем условия задачи в виде следующей транспортной таблицы

Транспортная таблица					
	B_1	B_2	…	B_n	Запасы a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Строки транспортной таблицы соответствуют ПО (в последней клетки каждой строки указан объем запаса груза), а столбцы – ПН (последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности. Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и в правом столбце) содержат информацию о перевозках x_{ij} и их стоимости c_{ij}.

Запишем систему ограничений.

1) *Ограничение по уровню запасов*: Суммарное количество груза, направленного из каждого ПО во все ПН должно быть равно запасу груза в данном ПО:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

2) *Ограничение по уровню спроса*: Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО должно быть равно заявке данного ПН:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Целевая функция: Суммарная стоимость всех перевозок, которую необходимо минимизировать:

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

Планом перевозок называется любая совокупность значений переменных x_{ij} - матрица размера $m \times n$.

Допустимым решением называется план x_{ij}, удовлетворяющий системе ограничений ТЗ.

Оптимальным решением называется допустимое решение, доставляющее минимум целевой функции.

Решение ТЗ в Excel

Надстройка *Поиск решения* в Microsoft Excel позволяет напрямую находить оптимальное решение транспортной задачи.

I. Закрытая модель, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

До вызова *Поиск решения* необходимо подготовить данные для решения ТЗ на рабочем листе Excel.

В Excel закрытая задача решается учетом ограничений для всех отправителей и всех потребителей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

- условия полного распределения запасов и полного удовлетворения потребностей.

Пример 1. На трех складах имеется мука в количестве 60, 130, 90 т., которая должна быть доставлена четырем хлебозаводам в количестве 30, 80, 60, 110 т соответственно. Составить оптимальный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы, если стоимость доставки 1 т муки на хлебозаводы задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

▼ **Рабочий лист Excel для примера 2.30**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		B_1	B_2	B_3	B_4	*a*		В ограничениях Поиска решения			
2	A_1	6	8	15	4	60		закрытая	модель	установить:	
3	A_2	9	15	2	3	130		Σ*a* =	280	строка Σ	=
4	A_3	6	12	7	10	90		Σ*b* =	280	столбец Σ	=
5	*b*	30	80	60	110						
6											
7		B_1	B_2	B_3	B_4	Σ					
8	A_1	0	0	0	0	0					
9	A_2	0	0	0	0	0					
10	A_3	0	0	0	0	0					
11	Σ	0	0	0	0						
12											
13		minL =	0								

В правой части табл. 2.30 указана подсказка:

В ограничениях Поиска решения			
=ЕСЛИ(B9=B10;"закрытая";"открытая")	модель	установить:	
Σ*a* =	=СУММ(F2:F4)	строка Σ	=ЕСЛИ(B9=B10;"=";ЕСЛИ(B9<B10;" =";"<="))
Σ*b* =	=СУММ(B5:E5)	столбец Σ	=ЕСЛИ(B9=B10;"=";ЕСЛИ(B9<B10;"<=";" ="))

Приведем последовательность ввода данных задачи и формул в соответствующие ячейки.

A1:F5 — вводится транспортная таблица примера.

I3 — вычисляется сумма по строкам по формуле: =СУММ(F2:F4).

I4 — вычисляется сумма по столбцам по формуле: =СУММ(B5:E5).

Из сравнения значений делается сообщение о типе модели (закрытая, открытая) и типе ограничений (=, < =) в окне *Поиск решения*.

A7:F11 — составляется начальная матрица перевозок (вначале копируется транспортная таблица, затем редактируется)

B8:E10 — производится резервирование и обнуление изменяемых переменных (начальная матрица перевозок).

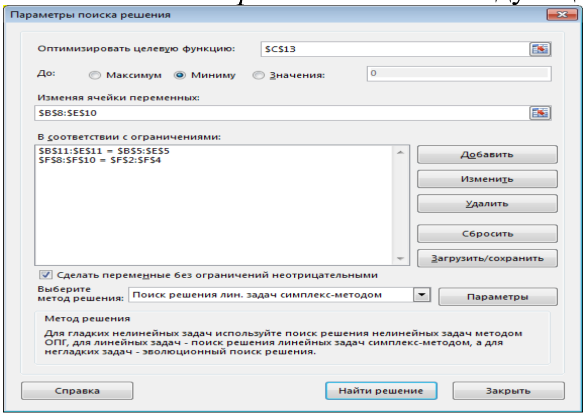
F8:F10 и B11:E11 — подсчитываются суммы Σ по строкам и столбцам начальной матрицы перевозок.

C13 — вычисляется стоимость начального плана L по формуле: =СУММПРОИЗВ(B2:E4;B8:E10).

Далее нужно выполнить команду *Поиск решения*. В диалоговом окне *Поиск решения*:

- установить целевую ячейку L равной минимальному значению;
- в качестве изменяемых ячеек ввести матрицу перевозок x_{ij};
- установить ограничение для всех отправителей и всех потребителей;
- выбрать метод решения: *Поиск решения лин. задач симплекс-методом*.

Заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеет следующий вид



Равенство $B$11:$E$11 = $B$5:$E$5 означает условие полного удовлетворения потребностей.

Равенство $F$8:$F$10 = $F$2:$F$4 означает условие полного распределения запасов.

После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

	B_1	B_2	B_3	B_4	Σ
A_1	0	60	0	0	60
A_2	0	0	20	110	130
A_3	30	20	40	0	90
Σ	30	80	60	110	
	L =	1550			

Оптимальное решение $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}$, $L_{\min} = 1550$ усл. ед.

Таким образом, из первого склада следует отправить муку на 2-й хлебозавод в количестве 60 т., из второго склада — на 3-й и 4-й хлебозаводы в количестве 20 и 110 т. соответственно, из третьего склада — на 1-й, 2-й и 3-й хлебозаводы в количестве 30, 20 и 40 т. соответственно. При этом минимальные транспортные расходы составят 1550 усл. ед ▲

Упражнение 1. На предприятии имеются три группы станков, каждая из которых может выполнять пять операций по обработке деталей (в любом порядке). Максимальное время работы каждой группы станков соответственно равно 100, 250, 180 ч. Каждая операция должна выполняться соответственно 100, 120, 70, 110, 130 ч.

Производительность каждой группы станков на каждую операцию задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Определить, сколько времени и на какую операцию нужно использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

Ответ. Оптимальное решение

$$X = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}, \; L_{\max} = 5170 \text{ шт.}$$

Таким образом, на первой группе станков целесообразно выполнять операции 1 и 4 продолжительностью 40 и 60 ч соответственно, на второй группе — операции 1, 2 и 3 продолжительностью 60, 120 и 70 ч соответственно, на третьей группе — операции 4 и 5 продолжительностью 50 и 130 ч соответственно. При этом максимальное число обработанных деталей составит 5170 шт.

II. Открытая модель, $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Для открытой модели может быть два случая:

a) суммарные запасы превышают суммарные потребности: $\sum a_i > \sum b_j$;

b) суммарные потребности превышают суммарные запасы: $\sum a_i < \sum b_j$.

В Excel открытая задача решается путем изменения ограничений по предложению (если предложение превышает спрос) или по спросу (если спрос превышает предложение), т.е. система ограничений будет иметь вид:

a) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1,n}) \end{cases}$ - условия неполного распределения запасов и полного удовлетворения потребностей;

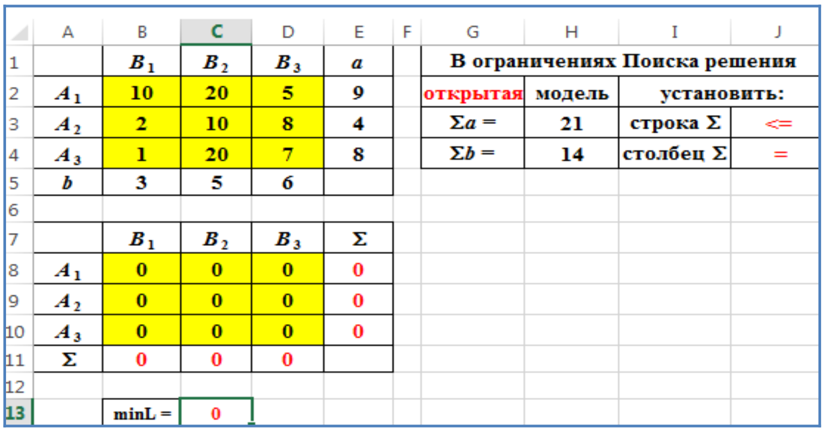
b) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, (j = \overline{1,n}) \end{cases}$ - условия полного распределения запасов и неполного удовлетворения потребностей.

Пример 1. Три торговых склада могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4, 8 т. Величина спроса трех магазинов розничной торговли на это изделие равна 3, 5, 6 т соответственно. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

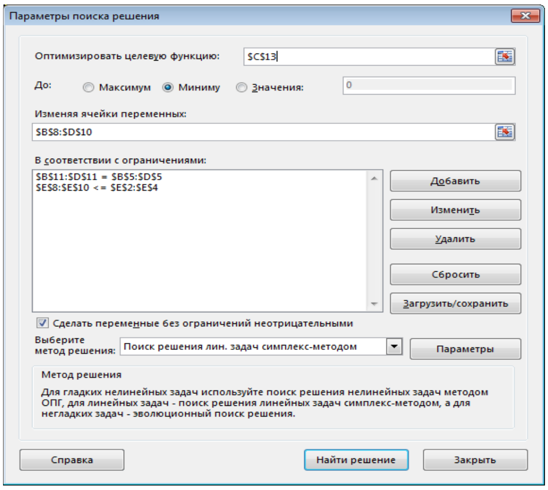
$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 8 \\ 1 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором спросы на изделия в магазины были бы выполнены при минимальной стоимости всех перевозок.

▼ Рабочий лист Excel и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют вид



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		B_1	B_2	B_3	a		В ограничениях Поиска решения			
2	A_1	10	20	5	9		открытая	модель	установить:	
3	A_2	2	10	8	4		$\Sigma a =$	21	строка Σ	<=
4	A_3	1	20	7	8		$\Sigma b =$	14	столбец Σ	=
5	b	3	5	6						
6										
7		B_1	B_2	B_3	Σ					
8	A_1	0	0	0	0					
9	A_2	0	0	0	0					
10	A_3	0	0	0	0					
11	Σ	0	0	0						
12										
13		minL =	0							



Неравенство $E$8:$E10< = $E$2:$E$4 означает условие неполного распределения запасов.

После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

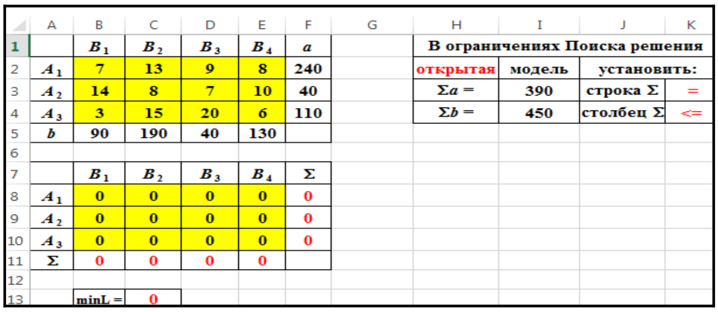
	B_1	B_2	B_3	Σ
A_1	0	0	6	6
A_2	0	4	0	4
A_3	3	1	0	4
Σ	3	5	6	
	$L =$	93		

Оптимальное решение $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_{\min} = 93$ ▲

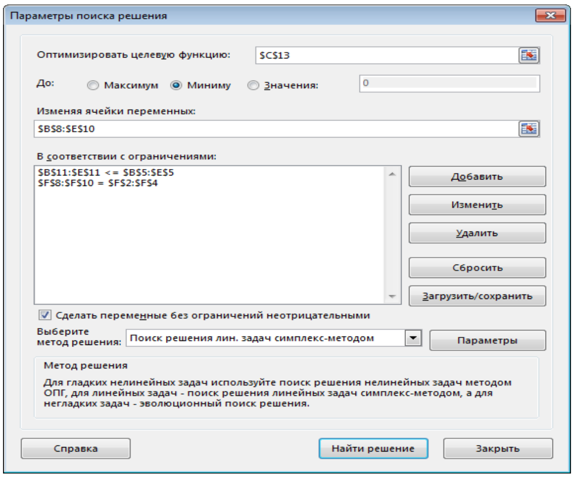
Пример 2. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40, 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю даны матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

▼ Рабочий лист Excel и заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют следующий вид



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		B_1	B_2	B_3	B_4	a		В ограничениях Поиска решения			
2	A_1	7	13	9	8	240		открытая	модель	установить:	
3	A_2	14	8	7	10	40		$\Sigma a =$	390	строка Σ	=
4	A_3	3	15	20	6	110		$\Sigma b =$	450	столбец Σ	<=
5	b	90	190	40	130						
6											
7		B_1	B_2	B_3	B_4	Σ					
8	A_1	0	0	0	0	0					
9	A_2	0	0	0	0	0					
10	A_3	0	0	0	0	0					
11	Σ	0	0	0	0						
12											
13		minL =	0								



Неравенство $B$11:$E11< = $B$5:$E$5 означает условие неполного удовлетворения потребностей.

После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

	B_1	B_2	B_3	B_4	Σ
A_1	0	90	40	110	240
A_2	0	40	0	0	40
A_3	90	0	0	20	110
Σ	90	130	40	130	
	L =	3120			

Оптимальное решение $X = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $L_{\min} = 3120$ ▲

Упражнение 1. Три фермерских хозяйства A_1, A_2, A_3 ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в следующей таблице

Фермерские хозяйства	Затраты на перевозку 1 ц к торговым точкам					Запас молока, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	60
A_2	9	5	7	4	6	60
A_3	6	8	4	9	7	50
Потребности, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план поставки молока в каждую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

Ответ: Оптимальное решение

$$X=\begin{pmatrix}30 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 5 & 20 & 25\\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0\end{pmatrix},\ L_{\min}=785.$$

Задачи о назначениях

Задача о назначениях имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины и т.п.

В наиболее общей форме задача о назначениях формулируется следующим образом. Имеется некоторое число работ и некоторое число работников. Любой работник может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой работники соответствуют пунктам отправления, а работы – пунктам назначения. Особенность лишь в том, что все переменные решения принимают только значения 0 или 1 (двоичные переменные) и в каждом столбце и строке может быть только одно ненулевое значение.

Точно так же, как и транспортная модель, задача назначений может быть несбалансированной, содержать недопустимые назначения, иметь альтернативные решения при одном и том же значении целевой функции. Эти варианты моделей назначения строятся в полной аналогии с соответствующими транспортными моделями.

Для решения задачи о назначениях в Excel с использованием надстройки *Поиск решения* на рабочем листе следует выделить ячейки назначений и подсчитать для них суммы по столбцам и по строкам. В ячейку целевой функции следует ввести формулу, вычисляющую сумму произведений затрат работ на план назначений.

В диалоговом окне *Поиск решения* выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения: суммы значений изменяемых ячеек для каждой строки и столбца должны быть равны 1; переменные должны бть двоичными.

Пример 1. Администрация предприятия приняла на работу пять человек. Каждый из них затрачивает различное время на выполнение определенной работы. Необходимо выполнить пять видов работ. Время выполнения работы $(c)_{ij}$ каждым работником приведено в следующей таблице

Работник	Время выполнение работы, ч				
	1	2	3	4	5
A_1	25	16	15	14	13
A_2	25	17	18	23	15
A_3	30	15	20	19	14
A_4	27	20	22	25	12
A_5	29	19	17	32	10

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным.

▼ Экономико-математическая модель задачи

Переменные: $x_{ij}=\begin{cases}0, \text{если работник } i \text{ не назначен на работу } j\\ 1, \text{если работник } i \text{ назначен на работу } j\end{cases}$.

Ограничения:

• по работам: $\sum\limits_{j=1}^{5} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,5}$;

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,5}$$

- по работникам: .

Целевая функция: суммарное время, необходимое для завершения всех видов работ, которое необходимо минимизировать:

$$L = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

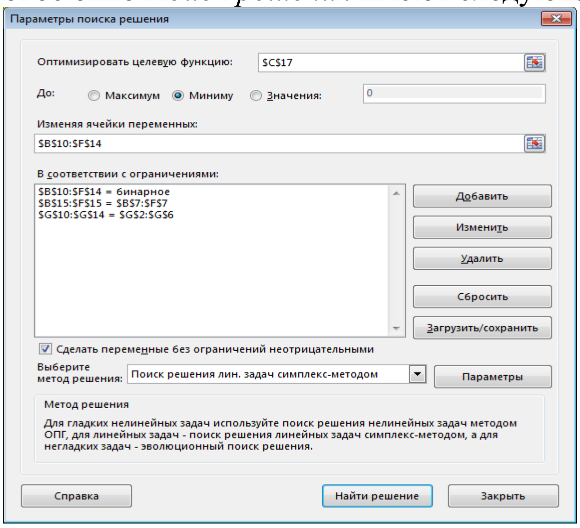
Рабочий лист Excel имеет следующий вид

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a
1		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a
2	A_1	25	16	15	14	13	1
3	A_2	25	17	18	23	15	1
4	A_3	30	15	20	19	14	1
5	A_4	27	20	22	25	12	1
6	A_5	29	19	17	32	10	1
7	b	1	1	1	1	1	
8							
9		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Σ
10	A_1	0	0	0	0	0	0
11	A_2	0	0	0	0	0	0
12	A_3	0	0	0	0	0	0
13	A_4	0	0	0	0	0	0
14	A_5	0	0	0	0	0	0
15	Σ	0	0	0	0	0	
16							
17		minL =	0				

В ограничениях Поиска решения			
закрытая	модель	установить:	
Σa =	5	строка Σ	=
Σb =	5	столбец Σ	=

Значения матрицы переменных x_{ij} располагаются в ячейках B10:F14. В ячейку C17 введена формула для вычисления значения целевой функции. В ячейках B15:F15 и G10:G14 рассчитываются суммы по строкам и столбцам матрицы переменных.

Заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеют следующий вид



После выполнения программы работы «Поиск решения» получим

	B1	B2	B3	B4	B5	Σ
A1	0	0	0	1	0	1
A2	1	0	0	0	0	1
A3	0	1	0	0	0	1
A4	0	0	0	0	1	1
A5	0	0	1	0	0	1
Σ	1	1	1	1	1	
	L =	83				

Таблица переменных состоит из единиц и нулей. По единицам определяем, что 1- ый работник должен работать на четвертом виде работы, 2- ой на первом, 3- ий на втором, 4-

ый на пятом, 5- ый на третьем. Общее время завершения всех видов работ составляет 83 ч. ▲

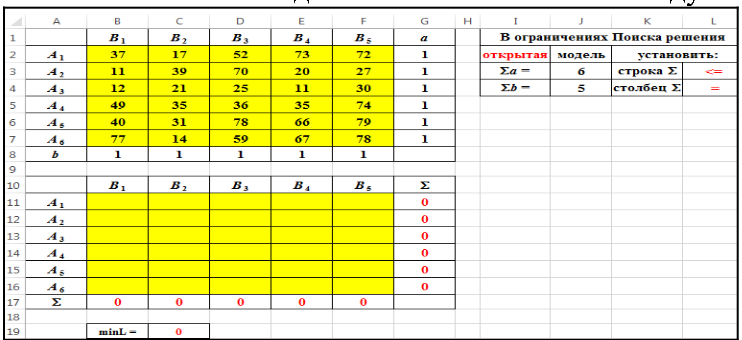
Пример 2. На предприятии имеется 6 автомобилей разных моделей. Необходимо в разные районы области перевести 5 грузов. Затраты по перевозке каждого груза каждым автомобилем различны и приведены в следующей таблице

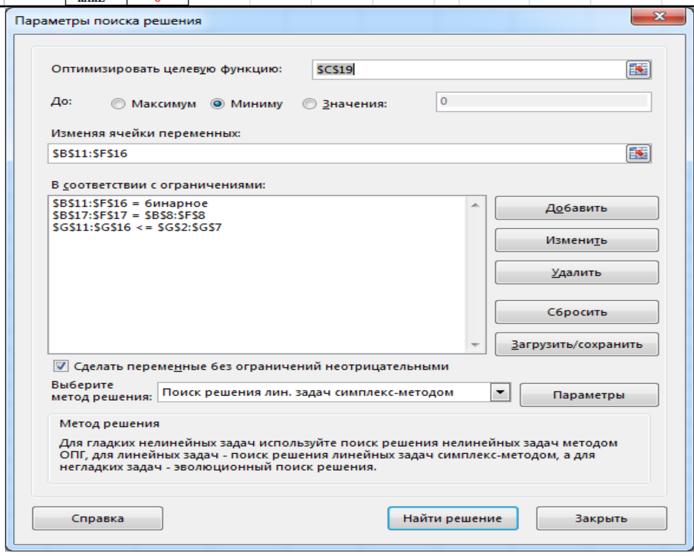
Автомобиль	Затраты по перевозке груза				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	37	17	52	73	72
A_2	11	39	70	20	27
A_3	12	21	25	11	30
A_4	49	35	36	35	74
A_5	40	31	78	66	79
A_6	77	14	59	67	78

Выбрать автомобиль для каждого вида груза так, чтобы затраты на перевозку были минимальными. Определить эти затраты.

▼ В данном примере число автомобилей больше, чем грузов, т.е. один автомобиль окажется невостребованным.

Рабочий лист Excel и заполненное диалоговое окно имеют следующий вид





После выполнения программы работы «Поиск решения» получим следующее оптимальное решение

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Σ
A_1	1	0	0	0	0	1
A_2	0	0	0	0	1	1
A_3	0	0	0	1	0	1
A_4	0	0	1	0	0	1
A_5	0	0	0	0	0	0

A_6	0	1	0	0	0	1
Σ	1	1	1	1	1	
	L =	125				

По единицам таблицы определяем закрепление автомобилей за грузами, при этом затраты по перевозке грузов составляют 125 усл. ед.

Задача о максимальном потоке

Рассмотрим сеть с одним узлом входа (*источник*) и одним узлом выхода (*сток*). Для наглядности будем представлять, что по дугам из источника в сток направляется некоторое вещество (количество машин, информации, жидкости и т.п.).
Количество вещества, проходящего через дугу в единицу времени, называется потоком по дуге. Предполагается, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел.

Величина потока определяется как сумма потоков вдоль дуг, исходящих из источника, или, что то же самое, как сумма потоков вдоль дуг, заходящих в сток.

Максимум, или верхнее ограничение на поток в дуге сети будем рассматривать как *пропускную способность*, или *мощность* дуги. Мощность потока может зависеть от его направления. Условное изображение в сети

означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность от 2 к 1 равна 4.

Задача о максимальном потоке заключается в нахождении максимальной величины потока, который может войти в систему и выйти из неё в заданный период времени.

При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

- поток по каждой дуге не должен превышать ее пропускной способности;
- общий поток из источника равен общему потоку, приходящему в сток;
- для промежуточных вершин количество единиц потока, попавшего в данный узел, должно в точности равняться количеству единиц потока, вышедшего из этого узла.
- величина потока по каждой дуге была целым неотрицательным числом.

Задача о максимальном потоке решается как задача линейного программирования.

Пример 1. Система автодорог, проходящих через Псковскую область, может обеспечить пропускные способности, показанные на рисунке (тыс. автомашин в час).

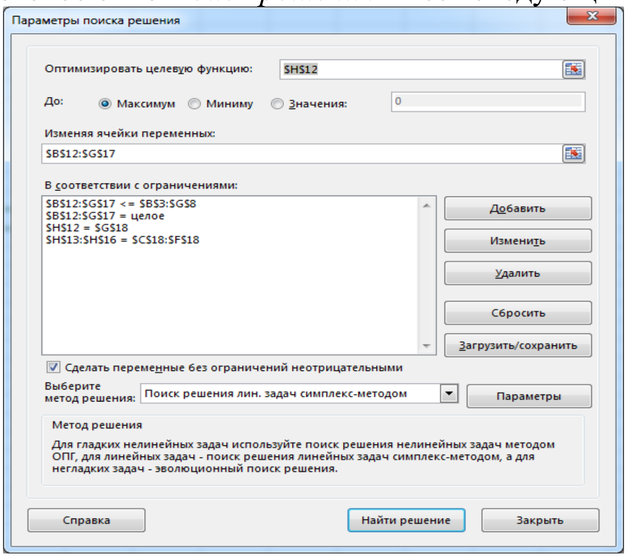
Определим максимальный поток через эту систему.

▼ Расчетные показатели, сформированные на рабочем листе Excel и в режиме просмотра формул показаны на следующих рисунках

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Пропукскные способности						
2	узлы	1	2	3	4	5	6	
3	1		2	6	3			
4	2	0			1	4		
5	3	0			3		2	
6	4	0	1	2		1	3	
7	5		4		1		6	
8	6			0	0	0		
9								
10		Потоки						
11	узлы	1	2	3	4	5	6	
12	1							0
13	2							0
14	3							0
15	4							0
16	5							0
17	6							0
18		0	0	0	0	0	0	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Пропускные способности**						
2	**узлы**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
3	**1**		**2**	**6**	**3**			
4	**2**	**0**			**1**	**4**		
5	**3**	**0**			**3**		**2**	
6	**4**	**0**	**1**	**2**		**1**	**3**	
7	**5**		**4**		**1**		**6**	
8	**6**			**0**	**0**	**0**		
9								
10		**Потоки**						
11	**узлы**	1	2	3	4	5	6	
12	**1**							=СУММ(B12:G12)
13	**2**							=СУММ(B13:G13)
14	**3**							=СУММ(B14:G14)
15	**4**							=СУММ(B15:G15)
16	**5**							=СУММ(B16:G16)
17	**6**							=СУММ(B17:G17)
18		=СУММ(B12:B17)	=СУММ(C12:C17)	=СУММ(D12:D17)	=СУММ(E12:E17)	=СУММ(F12:F17)	=СУММ(G12:G17)	

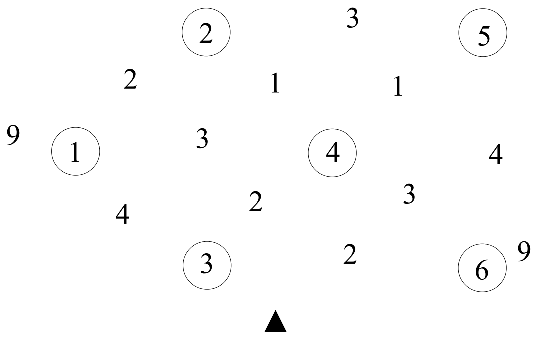
Заполненное диалоговое окно *Поиск решения* имеет следующий вид



После выполнения программы работы «Поиск решения» получим следующее оптимальное решение:

	Потоки						
узлы	1	2	3	4	5	6	
1	0	2	4	3	0	0	9
2	0	0	0	0	3	0	3
3	0	0	0	2	0	2	4
4	0	1	0	0	1	3	5
5	0	0	0	0	0	4	4
6	0	0	0	0	0	0	0
	0	3	4	5	4	9	

Вывод. Максимальный поток через сеть равен 9 тыс. Конечная модель потоков показана на следующем рисунке.


2 3 5
2 1 1
9 1 3 4 4
4 2 3
3 2 6 9